Matematik Öğretmeni Adaylarının Sonsuz Kümelerin Denkliği ile İlgili İspatlama Yaklaşımları ve Yaşadıkları Güçlükler

Ozan Pala[a] ve Serkan Narlı[b]

[a]Milli Eğitim Bakanlığı, İhsan Erturgut Ortaokulu, Manisa/Türkiye (ORCID: 0000-0002-8691-9979); [b]Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, İzmir/Türkiye (ORCID: 0000-0001-8629-8722)

Makale Geçmişi: Geliş tarihi: 12 Nisan 2018; Yayına kabul tarihi: 8 Haziran 2018; Çevrimiçi yayın tarihi: 26 Haziran 2018

Öz: Bu çalışmada öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili ispatlama yaklaşımlarının ve bu konu ile ilgili güçlüklerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda verilerin toplanması için açık uçlu sorular içeren bir form geliştirilmiş ve 121 matematik öğretmeni adayına uygulanmıştır. Elde edilen veriler içerik analizi ile incelenmiştir. İspatların sınıflanması için Blum ve Kirsch (1991) tarafından sunulan ispat şeması dikkate alınmıştır. Sonuçta öğretmen adaylarının gerçekleştirdikleri ispatlarda *formal* ve *pre-formal* yaklaşımları benimseyebildikleri tespit edilmiştir. Bununla birlikte *pre-formal* yaklaşıma sahip bireylerin ispatlama aktivitelerinde, formal bilgileri ile sezgilerini bir arada kullanabildikleri de görülmüştür. Diğer yandan öğretmen adaylarının ispatı oluşturamamalarına neden olan yanılgıları, bilgi eksiklikleri ve yöntemsel yetersizlikleri belirlenip özellikle yanılgılar, başlıklar halinde sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sonsuz kümeler, Cantor küme teorisi, eşgüçlülük, ispat, matematik eğitimi

DOI: 10.16949/turkbilmat.414818

Abstract: In this study, it was aimed to determine both prospective teachers' proving approaches related to equivalence of infinite sets and their difficulties about this subject. In accordance with this purpose, a form including open-ended questions was developed to collect data and it was applied to 121 mathematics teacher candidates. Obtained data were analyzed via content analysis. Proof scheme introduced by Blum and Kirsch (1991) was taken into account for categorizing proofs. Consequently, it was identified that prospective teachers can adopt both *formal* and *pre-formal* approaches in their proving activities. In addition, it has been seen that individuals, who used *pre-formal* approach, can use their formal knowledge and intuitions together in proving activities. On the other hand, misconceptions, lack of knowledge and methodological deficiencies, which caused to candidate teachers to fail constructing proof, were identified and especially the misconceptions of them were presented through separate headings.

Keywords: Infinite sets, Cantor set theory, cardinality, proof, mathematics education

See Extended Abstract

1. Giriş

Matematiğin yığılmalı bir bilim olması ve matematiksel kavramlar arasında ilişkisel bir yapının yer alması nedeni ile yeni bilgilerin öncekiler üzerine inşa edilmesinin bir gereklilik olduğu söylenebilir. Diğer yandan bu inşa sürecinde bireylerin çoğu zaman karşılaştıkları bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını nedenleri ile ortaya koymaları da gerekebilmektedir. Bilginin gerekçelendirilmesi ile ilgili bu husus matematiksel

Sorumlu yazar: Ozan Pala **e-posta:** ozanpala@yahoo.com

Kaynak Gösterme: Pala, O. ve Narlı, S. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili ispatlama yaklaşımları ve yaşadıkları güçlükler. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *9*(3), 449-475.

düşünmenin ispat boyutu ile ilişkilendirilebilir. Matematiğin ve matematik eğitiminin önemli bir bileşeni olan ispat, Türk Dil Kurumu (TDK, 2018) sözlüğünde *''Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama.''* şeklinde ifade edilmektedir. İspat ve ispatlama aktivitelerinin; matematiksel düşünmenin gelişiminde, matematiksel bilginin işlevsel hale getirilmesinde ve matematiğin kendisinin anlamlandırılabilmesinde merkezi bir rol üstlendiği söylenebilir (Uğurel ve Moralı, 2010). Diğer yandan matematik eğitimcileri arasında ispat kavramının farklı şekillerde tanımlanabildiği görülmektedir. Örneğin Baki'nin (2006) bakış açısına göre ispat, bir iddianın kapsadığı tüm şartlar altında genelliğinin ortaya konabilmesi şeklinde ifade edilebilir. Harel ve Sowder (1998) ise ispatı, bireyin kendisini veya diğerlerini bir iddianın doğru ya da yanlış olduğuna ikna etmede kullandığı argümanlar şeklinde tanımlamaktadır. İspatlamanın problem çözme ile ilişkisini ifade eden Shipley (1999) ise matematik araştırmacıları açısından ispat yazma sürecinin genel olarak hipotezlerin belirlenmesi ile başlayan, bunların test edilmesini içeren ve sonunda yazılı bir çözümün oluşturulması ile tamamlanan kompleks bir aktivite olduğunu ifade etmiştir. Bunlara ek olarak Tall (1998) ise ispatın, verilen bir iddianın hem doğru olduğunu hem de neden doğru olduğunu açıklayıcı bir işleve sahip olduğunu belirtmektedir. Literatür incelendiğinde matematik eğitimcilerinin, ispatın tanımına ilişkin farklı boyutları dikkate alınarak farklı sınıflamalar ortaya koydukları görülmektedir (ör., Balacheff, 1988; Blum & Kirsch, 1991; Harel & Sowder, 1998; Miyazaki, 2000; Weber & Alcock, 2004). Örneğin Weber ve Alcock (2004) yükseköğretim düzeyinde öğrenim gören öğrenciler ile gerçekleştirilen iki bağımsız çalışmanın sonuçlarından hareketle ispatın sözdizimsel (syntactic) ve anlamsal (semantic) biçimde oluşturabileceğini belirtmişlerdir. Yazarlara göre bunlardan daha sade olan sözdizimsel ispatta bireyin ilgili kavramın tanımını, bu kavram ile ilgili önemli olguları - teoremleri hatırlaması ve bunlardan hareketle doğru çıkarımlarda bulunması beklenirken, anlamsal ispatta ise bireyin ortaya koyduğu gerçekliğin doğru temsillerini oluşturarak açıklayabilmesi beklenmektedir. Dolayısı ile sözdizimsel ispatın formel çıkarım sürecinde temellenmesine karşın anlamsal ispat üretiminin sezgisel çıkarımlardan beslenebileceği söylenebilir (Weber & Alcock, 2004). Diğer yandan bireylerin ispatlama sürecinde kendilerini ikna etme biçimlerini dikkate alarak ispat şeması fikrini ortaya koyan Harel ve Sowder (1998) ise ispatları dışsal, deneysel ve analitik şemalar ile bunların alt kategorileri altında sınıflamışlardır. Diğer bir sınıflama da Blum ve Kirsch (1991) tarafından ispatın geçerlik boyutu dikkate alınarak oluşturulmuştur. Yazarlar ispatlama eylemlerini "ispat", *pre-formal* ispat ve *formal* ispat düzeyleri içerisinde tanımlamış ve bunlardan "ispat" seviyesinin yalıtılmış olaylar içerisinde; deneysel doğrulamalar ve sezgisel argümanlar ile eksik kalmış tümevarım yaklaşımlardan oluşan yeterince düzenlenmemiş geçersiz bir yaklaşım olduğunu ifade etmişlerdir. Diğer yandan onlara göre geçerli bir ispat ise aşağıda sunulan kategoriler içerisinde yer alabilir (Aylar, 2014):

- ✓ *Pre-formal İspat:* Geçerli, yalnız formel olarak gösterilmeyen, ortaya konmayan önermelerdir. Bu yaklaşımda, ispatın neden doğru olduğu ortaya konur ancak iyi yapılanmış mantıksal çıkarımlar yoktur.
- ✓ *Formal İspat:* Matematiksel olarak kabul edilen mantıksal çıkarımların yer aldığı ispatlardır.

İspatlama aktivitelerinin matematiğin bütününe dair genel bir karakteristiği yansıttığı ve bu nedenle pek çok konu alanı içerisinde kendisine özgü bir yer bulduğu söylenebilir. Bununla birlikte bu çalışmada söz konusu alanlardan biri olan sonsuzluk üzerine odaklanılmış ve öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili ispatlarının Blum ve Kirsch (1991) tarafından ortaya konan ispat kategorilerine göre incelenmesi ile onların yaklaşımları ve güçlükleri araştırılmıştır.

1.1. Matematiksel Sonsuzluk

İnsanoğlunun ilkel zamanlarından beri ilgisini çeken sonsuzluk kavramının bireylerin günlük yaşam deneyimlerinden uzak olduğu ve bu durumda kavramın anlamlandırmasında önemli bir güçlük yarattığı söylenebilir. Tall'a (2001) göre sonsuzluk kavramının bireyler tarafından doğrudan deneyimlenememesi ve bu nedenle sonsuzluğun sonlu deneyimler ile açıklanmaya çalışılması söz konusu güçlüklerin önemli bir sebebi olarak ifade edilebilir. Bu durum Fischbein (2001) tarafından sonlu gerçekliğe adapte olan şemaların sonsuzluk ile karşılaştığında çelişkili durumlar ortaya çıkarması şeklinde açıklanmaktadır. Fischbein, Tirosh ve Hess (1979) ise sonsuzluğun ortaya çıkardığı bu çelişkileri aşmak için insan zihninin sonsuzluğu bir potansiyel olarak ele aldığını ifade etmişlerdir. İlk olarak Aristo (MÖ 384-322) tarafından ortaya konmuş olan potansiyel sonsuzluk (potential infinity) kavramı, sonsuzluğun asla bitmeyecek bir süreç olarak algılanması iken sonsuzluğun gerçek (actual infinity) düzeyde algılanması ise potansiyel olan bu sürecin tek bir bütün olarak nesneleştirilmesidir (Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005).

Sonsuzluğun kavramsallaştırılmasında yaşanan güçlükler nedeni ile matematikçilerin uzun yıllar boyunca sonsuzluk kavramı ile ilgilenmekten kaçındıkları söylenebilir. Hatta Galileo ve Gauss gibi bilinen matematikçilerin dahi sonsuzluğun mantıksal süreçlere dâhil edilemeyecek bir kavram olduğu kanısına vardıkları bilinmektedir (Narlı ve Narlı, 2012). Bununla birlikte sonsuzluğun anlamlandırılmasında ve matematiksel bir nesne olarak kabul edilmesinde Georg Cantor'un (1845-1918) çalışmalarının önemli bir payı olduğu söylenebilir. Dedekind'in (1831-1916) sonsuzluk üzerine yaptığı çalışmaları devam ettiren ve onun sonsuz kümeler için sunduğu *''öz alt kümelerinden birine eşit olabilme''* tanımını (Akbulut ve Akgün, 2004) temel alan Cantor, sonsuz kümeyi kendi öz alt kümelerinden en az biri ile bijektif (birebir-örten) eşlenebilen küme olarak tanımladığı küme teorisini ortaya koymuştur (Narlı ve Narlı, 2012). Bu nedenle gerçek sonsuzluk kavramının Cantor tarafından ortaya konmuş olan küme teorisi ile matematiğe girdiği (Tsamir & Dreyfus, 2002) ve kavramın 20.yy'da tam olarak anlaşılabilmesinin yaşanan bu gelişmeler sayesinde mümkün olduğu söylenebilir (Karaçay, 2004).

Cantor, geliştirdiği bu yeni teori ile kümelerin denkliğinin belirlenmesinde yeni bir yaklaşımda bulunmuş ve "*aralarında en az bir bijektif fonksiyon tanımlanabilen*" kümelerin denk olduğunu aşağıdaki tanım çerçevesinde ortaya koymuştur.

$$A \sim B \Leftrightarrow \{f \mid f : A \rightarrow B, \text{ bijektif}\} \neq \varnothing \quad \text{(Güney ve Özkoç, 2015, s. 418)}$$

Bununla birlikte Cantor, ortaya koyduğu bu yeni denklik tanımından hareketle kardinalite kavramını ve bunun devamı olarak da sonlu ötesi sayıları matematiğe kazandırmıştır. Onun yaklaşımına göre kardinal sayı, birbirine denk kümelerin karşılık geldiği ve bu kümelerin eleman sayılarını belirten sayıdır (Özmantar, 2010).

1.2. Sonsuzluk Üzerine Öğretmen Adayları ile Yapılmış Bazı Çalışmalar

Cantor küme teorisinin ve bunun özelinde sonsuz kümelere dair denklik ilişkilerinin bireyler tarafından anlaşılmasının ve ispatlanmasının epistemolojik, pedagojik ve psikolojik pek çok değişkene bağlı olduğu söylenebilir. Cantor'un küme teorisi gerçek sonsuzluk fikrini anlamayı gerektirir (Aztekin, 2008) ve Tsamir' e (2000) göre bu fikir sezgiler ile çeliştiğinden bireylerde kafa karışıklığına sebep olabilmektedir (akt. Sbaraglı, 2006, s.54). Bununla birlikte matematik eğitimi literatürü incelendiğinde öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramını anlamlandırma biçimleri ile bahsedilen güçlüklerini belirlemeye yönelik farklı çalışmalar gerçekleştirildiği görülmektedir (ör., Çelik ve Akşan, 2013; Güven ve Karataş, 2004; Jirotková & Littler, 2003; Kanbolat, 2010; Kolar & Čadež, 2012; Martin & Wheeler, 1987; Narlı & Başer, 2008; Pala, 2014; Singer & Voica, 2008; Tsamir, 1999, 2001). Örneğin, Martin ve Wheeler (1987) sonsuzluk kavramını aritmetik-geometrik, yakınsak-ıraksak ve kardinal-limit bağlamları içerisinde karşılaştırmalı olacak incelemiş ve öğretmen adaylarının bu kavramı kavrayış biçimleri arasındaki tutarsızlıkları belirtmiştir. Tsamir (1999) ise daha dar bir kapsam ile sınırlı kalarak sonsuz kümelerin karşılaştırılması üzerine odaklanmış ve Cantor küme teorisi ile ilgili ders almayan öğretmen adaylarında olduğu gibi bu dersi almış olan öğretmen adaylarının karar verme süreçlerinde dahi sezgisel yaklaşımın etkin olduğunu belirtmiştir. Benzer olarak Narlı ve Başer'de (2008) öğretmen adaylarının sahip oldukları birincil sezgilerinden dolayı kümelerin denkliklerini kabul etmede güçlükler yaşayabildiklerini belirtirken, Kanbolat (2010) da farklı temsiller ile verilen sonsuz kümelerin kıyaslanması istendiğinde öğretmen adaylarının sezgilerine dayalı yanıtlar verebileceğine dair örnekler sunmuştur. Diğer yandan Kolar ve Čadež (2012) ile Jirotková ve Littler (2003) ise öğretmen adaylarının sonsuzluk anlayışları ile ilgili olarak farklı bağlamlarda gerçekleştirmiş oldukları çalışmaların bulguları arasında onların bu konuda sahip olabilecekleri kavram yanılgılarına ilişkin çeşitli örnekler ortaya koymuşlardır. Pala (2016) ise öğretmen adaylarının sonsuz kümeleri karşılaştırmada yaşadığı güçlükleri hem sınıf içi gözlemler hem de ispat uygulamaları içerisinde incelemiş onların yetersizliklerinin sezgisel yaklaşımlarından, yanılgılarından ve ispat yöntemleri hakkındaki yetersiz bilgilerinden kaynaklanabileceğini ifade etmiştir. Ek olarak Güven ve Karataş'da (2004) öğretmen adaylarının sonsuz kümeleri karşılaştırmada sonlu kümelere dayalı anlayışları benimsemeleri nedeni ile sayılabilirlik ve sayılamazlık gibi temel kavramları yeterince anlayamadıklarını ifade etmişlerdir.

1.3. Problem Durumu

Öğrenciler için olduğu kadar öğretmenler için de anlaşılması zor bir kavram olan sonsuzluk kavramının (Maria, Thanasia, Katerina, Constantinos & George, 2009), henüz mesleğe başlamamış olan öğretmen adayları tarafından doğru bir şekilde kavramsallaştırılmasının büyük önem arz ettiği söylenebilir. Çünkü söz konusu kavramın ortaokul düzeyinde doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, reel sayılar, pi sayısı, doğru, ışın, doğru parçası, düzlem vb. ve ortaöğretim düzeyinde ise fonksiyon, dizi, seri, limit, türev, integral vb. pek çok kavramın inşasında önemli roller üstlendiği açıktır. Bu doğrultuda daha geniş bir pencereden bakıldığında öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramına ilişkin yetersizliklerinin, bunu gelecekte etkili biçimde oluşturamayacaklarının bir göstergesi olarak yorumlanabileceği (Martin & Wheeler, 1987) ve bu nedenle yukarıda sayılan diğer başlıklar ile birlikte değerlendirildiğinde öğretimin etkililik düzeyini bir bütün olarak doğrudan etkileyeceği yorumu yapılabilir. Diğer yandan literatür incelendiğinde öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramını anlayış biçimlerine ilişkin çalışmalar bulunmasına karşın ispat süreçlerinden hareketle onların yaklaşımlarının belirlenmesine ilişkin çalışmalar azınlıktadır. Bu sebeple bu çalışmada öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramına ilişkin anlayışlarının bir boyutu olan sonsuz kümeler arasındaki denklik ilişkilerine odaklanılmış ve bunların ispatlanması süreçlerindeki yaklaşımların ve güçlüklerin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarının ispatlarının sınıflanarak daha iyi analiz edilebilmesi amacı ile geçerli bir ispatın iki farklı kategorisini sunan Blum ve Kirsch‘e (1991) ait sınıflama, ispat türleri arasında anlaşılabilir ve kesin bir ayrım sunması nedeni ile tercih edilmiştir. Sunulan bu çerçeve ışığında araştırmanın problemi aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

‘‘ Matematik öğretmeni adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili ispatları oluştururken benimsedikleri yöntemler ve yaşadıkları güçlükler nelerdir? ‘‘

Bu araştırmanın soyut matematik dersini yürüten öğretim elemanlarına özellikle sonsuzluğun öğretiminde yaşanabilecek olası güçlükler hakkında bir fikir sunması beklenmektedir.

2. Yöntem

Bu çalışma betimsel türde nitel bir araştırmadır. Kaptan’a (1998) göre betimsel araştırmalar, olaylar ve objeler kavramların ne olduğunu betimleyerek açıklamaya çalışır ve bu sayede aralarındaki ilişkiler saptanmış olur. Araştırmada öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin ispat yaklaşımları ile yaşadıkları güçlüklerin kendi doğal çerçevesinde ve bütüncül bir bakış açısı ile belirlenmesi amaçlandığından nitel araştırma türlerinden durum çalışması (case study) deseni benimsenmiştir. Yıldırım ve Şimşek‘e (2013) göre durum çalışmaları ile bir ya da birkaç duruma ilişkin etmenlerin bir durumu nasıl etkilediği ve bundan nasıl etkilendiği belirlenebilir.

2.1. Çalışma Grubu

Araştırmanın gerçekleştirilmesi sürecinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir durum örneklemesi tekniği (convenience sampling) tercih edilmiştir. Bu amaçla bir devlet üniversitesinde matematik eğitimi anabilim dalında öğrenim gören ve ikinci sınıfta Seçmeli I (Mantık) dersine kayıtlı olan iki şubeden toplam 121 matematik öğretmeni adayı ile çalışma gerçekleştirilmiştir. Çalışma grubuna dair Tablo 1 aşağıda yer almaktadır.

Tablo 1. Çalışma grubu

	A Şubesi	B Şubesi	%
Kız Öğrenci Sayısı	44	49	77
Erkek Öğrenci Sayısı	17	11	23
Toplam	61	60	100

Çalışma grubunu oluşturan öğretmen adayları mantık, kümeler, bağıntılar ile fonksiyonlar konularını içeren Soyut Matematik dersini üniversite öğrenimlerinin ilk yılında ve eşgüçlülük, sayılabilirlik-sayılamazlık ile kardinalite konularını içeren Mantık dersini de üniversite öğrenimlerinin ikinci yılında tamamlamışlardır.

2.2. Verilerin Toplanması

Araştırma kapsamında öncelikle öğretmen adaylarının Cantor Küme Teorisi ile ilgili hazırbulunuşluklarının sağlanabilmesi için eşgüçlülük, sayılabilirlik-sayılamazlık ve kardinalite konularını içeren Seçmeli I (Mantık) dersi yazarlardan biri tarafından dönem boyunca sunulmuştur. Ders sürecinin tamamlanmasının ardından öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin ispat yaklaşımlarının ve bu süreçte yaşadıkları güçlüklerin belirlenebilmesi adına dört sorudan oluşan bir ispat formu iki alan uzmanının görüşü alınarak geliştirilmiştir. Bu form cevaplaması herkesçe zorunlu ve klasik tarzda açık uçlu sorulardan oluşmaktadır. Büyüköztürk'e (2005) göre açık uçlu soruların önemli avantajlarından biri ilgili konu hakkında kapsamlı ve derin bir iç görü sağlamasıdır. Seçilen sorular, üst düzey bilişsel becerileri ölçtüğü ve uzun yanıtlı olduğu için soru sayısı sınırlı tutulmuştur. Diğer yandan soruların cevaplanmasında serbestlik tam olarak sağlanmaya çalışılmış ve cevaplayıcılara herhangi bir kısıtlama getirilmemiştir. Formda yer alan soruların ders kapsamında ele alınan küme, fonksiyon, sonluluk, sonsuzluk, sınırlılık, sınırsızlık, sayılabilirlik ve kardinalite gibi temel kavramlar ile Cantor'un bijektif eşleme mantığı çerçevesinde edinilen temel kazanımları içerecek şekilde oluşturulmasına özen gösterilmiştir. Ayrıca seçilen sorulara benzer yaklaşımlar gerektiren farklı sorular, alternatif çözüm yolları ile ders sürecinde ele alınmıştır.

Formun hazırlanmasının ardından öğretmen adaylarının yanıtlarının değerlendirilmesi için anahtar bir form oluşturulmuştur. Bireylerin aynı ispatları farklı yollarla yapabileceği de düşünülerek bu anahtar form içerisine ders kapsamında sunulmuş olan ön bilgiler doğrultusunda oluşturulabilecek farklı ispat yaklaşımlarının eklenmesine gayret edilmiştir. Ayrıca bireylerin hipotezden hareketle hükme ulaşma sürecinde yer alan tüm ara basamakları yerine getirmeleri halinde ispatı tamamlamış sayılacakları kabul edilmiştir. Bu çalışmada, biri sayılabilir ve diğeri de sayılamaz kümelere ait denklik ilişkilerini içeren aşağıdaki iki soruya ilişkin analizlerden elde edilen bulgular sunulmuştur:

1) $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{Z}$, tam sayılar kümesi olmak üzere $\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ kümesi $\mathbb{N}$ kümesine denk midir? İspatlayınız.
2) $A = (-2,6) \cup \{8,9\}$ ile $B = [-9,-5] \cup \{4\}$ kümeleri denk midir? Kanıtlayınız.

2.3. Verilerin Analizi

Hazırlanan formun öğretmen adaylarına uygulanmasının ardından onların her bir soru için ispatlamada kullandıkları yöntemler ve ispata ulaşamama sebepleri kategorileştirilerek temel stratejiler ile sık karşılaşılan güçlüklerin anlaşılabilmesi amaçlanmıştır. Toplanan verilerin incelenmesinde nitel analiz yöntemlerinden içerik analizi yöntemi benimsenmiştir.

Patton (2014)'a göre içerik analizi hacimli olan nitel verinin temel tutarlılıkları dikkate alınarak indirgenmesi ve anlamlandırılması süreci şeklinde ifade edilebilir. Yıldırım ve Şimşek 'e (2013) göre ise içerik analizinin amacı verilerin açıklanabileceği genel kavram ve ilişkilere ulaşmaktır. Bu nedenle yazarlara göre toplanan verilerin düzenlenerek temalaştırılması beklenmektedir.

Analiz sürecinde her bir soru kendi içerisinde ele alınmıştır. İlk olarak öğretmen adaylarının verdikleri yazılı yanıtlar, anahtar form ile karşılaştırılarak ispatı tamamlayabilenler ve ispatı tamamlayamayanlar belirlenmiştir. Daha sonra bu ayrım dikkate alınarak ispata ulaşabilen öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini gösterme sürecinde kullandığı benzer yaklaşımlar ile ispata ulaşamayanların yaşadıkları benzer güçlükler kendi içlerinde iki alan uzmanı tarafından ayrı ayrı kodlanarak temalar oluşturulmuştur. Birden fazla araştırmacının bir arada çalıştığı araştırmalarda, aynı veri kümesi kodlanıp elde edilen kodların benzerlikleri ve farklılıkları sayısal olarak karşılaştırılır ve en az %70 düzeyinde bir güvenirliğe ulaşılması beklenir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu çalışmada da uyum yüzdesi yaklaşık %90 bulunmuştur.

3. Bulgular

Bu bölümde, veri toplama aracında öğretmen adaylarına yöneltilen iki soruya verilen cevaplar incelenmiştir. Bu noktada hem öğretmen adayları tarafından kullanılan temel yöntemler hem de karşılaşılan güçlükler kategoriler halinde sunulmuştur.

3.1. Birinci Soruya Verilen Yanıtların Analizi

Bu soruya verilen yanıtlar incelendiğinde 121 öğretmen adayı arasından 50'sinin ispatı doğru bir şekilde oluşturabildiği, 71 tanesinin ise çeşitli sebeplerden dolayı bunu başaramadığı görülmüştür. İspatı tamamlayan bireylerin tamamı Cantor tarafından ortaya konan bijektif eşleme yaklaşımını doğru bir şekilde kullanabilmiştir. Bu öğretmen adaylarının temel yaklaşımları aşağıda yer alan Tablo 2'de özetlenmiştir.

Tablo 2. Birinci soruyu tamamlayan öğretmen adaylarının yaklaşımları

Soru: $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{Z}$, tam sayılar kümesi olmak üzere $\mathbb{Z}x\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ kümesi $\mathbb{N}$ kümesine denk midir? İspatlayınız.

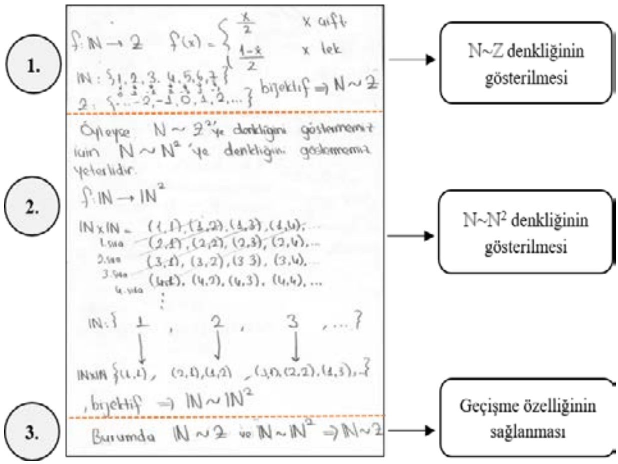
İspatı Oluşturabilenlerin Kullandıkları Temel Yaklaşımlar	Kişi Sayısı	İspat Türü (Blum & Kirsch,1991)
1) $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}^2 \Rightarrow \mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$	22	Formal
2) $\mathbb{Z}^2$ kümesini düzenli sıralayarak denkliği gösterenler	3	Formal
3) Kartezyen koordinat sistemi ile denkliği gösterenler	21	Formal
4) $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}\sim\mathbb{Z}^2 \Rightarrow \mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$	4	Pre-Formal
Toplam	**50**	

İspatı doğru tamamlayan öğretmen adaylarının kullandıkları temel yaklaşımlara aşağıda açıklanacaktır.

- $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}^2 \Rightarrow \mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$

İspatı bu yol ile tamamlayan öğretmen adayları $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{N}^2$ denkliklerinden hareketle $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$ sonucuna ulaşmışlardır. Bu öğretmen adaylarının, mevcut duruma bütünleştirici bir bakış açısı ile yaklaştıkları söylenebilir. Çünkü bu bireyler oluşturdukları iki ayrı denkliğin ($\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$ ile $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}^2$) sonuçlarını birlikte değerlendirebilmiş ve elde ettikleri $\mathbb{N}^2\sim\mathbb{Z}^2$ sonucunu da dikkate alarak $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$ denkliğinin sağlanması gerektiği hükmüne ulaşabilmişlerdir.

Söz konusu yaklaşımı benimsemiş olan öğretmen adaylarından birinin yaklaşımı aşağıda Şekil 1'de sunulmuştur.



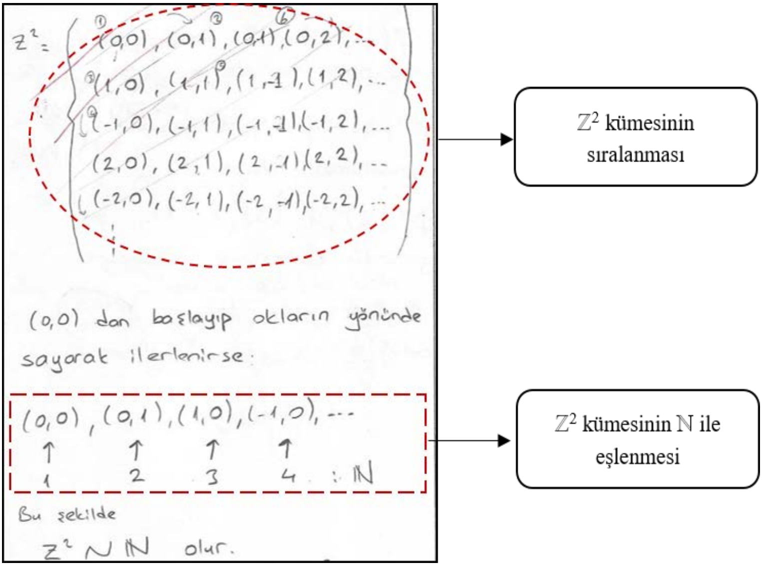
Şekil 1. $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}^2 \Rightarrow \mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$ yaklaşımı ile denkliğin gösterildiği bir ispat

Üç parçada incelenebilecek bu ispatlama sürecinin ilk aşamasında bireylerin genel olarak $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$ kümelerinin denkliğini f: $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{Z}$, y = f(x) tipinde tanımladıkları bijektif fonksiyon ile gösterdikleri, ikinci aşamasında $\mathbb{N}^2$ kümesini köşegenler boyunca düzenli biçimde sıralayarak $\mathbb{N}$ ile eşledikleri ve son olarak da denklik bağıntısının özünde yer alan geçişme özelliğini kullanarak $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$ çıkarımına ulaştıkları görülmüştür.

- $\mathbb{Z}^2$ kümesini düzenli sıralayarak denkliği gösterenler

İspatı bu şekilde tamamlayan öğretmen adayları $\mathbb{Z}^2$ kümesini doğrudan tek başına ele almışlardır. Bunun için öncelikle, $\mathbb{Z}^2$ kümesi düzenli şekilde sıralanabilmiş ve $\mathbb{N}$ ile arasında doğrudan izah edilebilir köşegensel bir eşlemenin olabileceği gösterilmiştir.

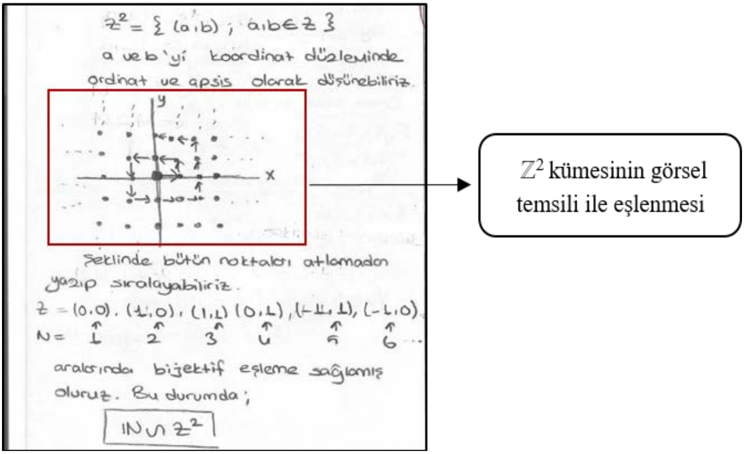
Bu öğretmen adaylarından birinin yaklaşımı Şekil 2'de sunulmuştur.



Şekil 2. $\mathbb{Z}^2$ kümesinin düzenli sıralanarak ℕ kümesine eşlendiği bir ispat

- Kartezyen koordinat sistemi ile denkliği gösterenler.

Bu yaklaşımı kullanan bireyler $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}^2$ denkliğini gösterirken $\mathbb{Z}^2$ =**{**(x,y) | x,y∈ $\mathbb{Z}$} kümesinin görsel temsili olan kartezyen sistemdeki ikililerden yararlanmıştır. Söz konusu yaklaşımı kullanan öğretmen adayları $\mathbb{Z}^2$ kümesini kartezyen koordinat sisteminde yer alan sıralı ikililerin bir kümesi olarak ifade ettikten sonra O(0,0) noktasından başlayarak belirli bir yönde hareket etmiş ve karşılaşılan her bir noktayı bir doğal sayıya eşleme yolu ile ispatı tamamlamışlardır. Burada öğretmen adaylarının ispatı tamamlarken görsel temsillerden yararlandığı söylenebilir. Bu öğretmen adaylarından birinin oluşturmuş olduğu ispat aşağıda Şekil 3'te yer almaktadır.



Şekil 3. Kartezyen koordinat sistemi ile denkliğin gösterildiği bir ispat

Bununla birlikte söz konusu yaklaşımı kullanan öğretmen adaylarının, derslerde önceden kendilerine sunulmuş olan $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}$ ispatına dair bilgilerini genişleterek yeni bir duruma transfer edebildikleri ve bu sayede $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$ ispatını oluşturabildikleri söylenebilir.

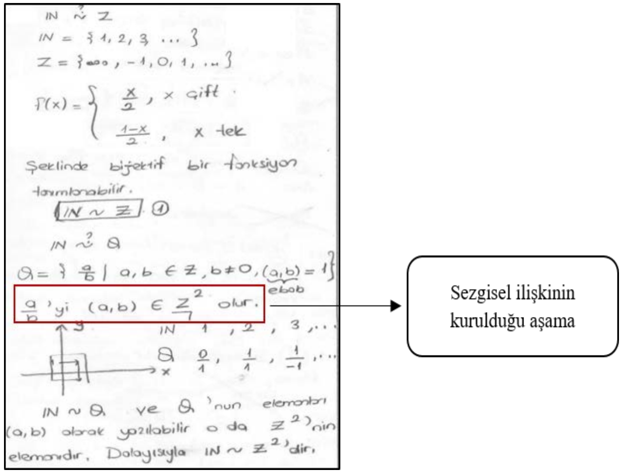
- $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}\sim\mathbb{Z}^2 \Rightarrow \mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$

Bu yöntemi kullanan öğretmen adaylarının önceden bildikleri $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}$ denkliği ile birlikte $\mathbb{Q}\sim\mathbb{Z}^2$ denkliğini de varsaydıkları ve bu çerçevede bir ispat oluşturmaya çalıştıkları söylenebilir. Bu öğretmen adaylarının $\mathbb{Q} \sqcup \mathbb{Z}^2$ olduğunu açıklayabilmek için aşağıda yer alan iki küme arasında görsel temsilleri de içeren bir ilişki kurdukları görülmüştür.

$$\mathbb{Z}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Q} = \{ \tfrac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z} ,\ b\neq 0 ,\ (a,b)=1\}$$

Buna göre kartezyen sistemde yer alan (a,b) noktaları ile rasyonel sayılar kümesinde yer alan $\frac{a}{b}$ sayıları arasında bir eşleme yapıldığı söylenebilir. Söz konusu yaklaşımı benimsemiş olan öğretmen adaylarından birinin ispatı Şekil 4'te sunulmuştur.



Şekil 4. $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}\sim\mathbb{Z}^2 \Rightarrow \mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$ yaklaşımı ile denkliğin gösterildiği bir ispat

Ancak düşünülenin aksine $\mathbb{Z}^2$ kümesinde yer alan pek çok ikilinin bir rasyonel sayıya karşılık gelemeyeceği açıktır. Çünkü aralarında asal m,n$\in\mathbb{Z}$ sayılarının katları ile oluşturulan (m.k,n.k)$\in\mathbb{Z}^2$ (k$\in\mathbb{Z}$) ikililerinden sadece (m,n)$\in\mathbb{Z}^2$ ikilisi bir rasyonel sayı ($\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$) ile eşlenebilir. Örneğin (1,2), (2,4), … , (k,2k)$\in\mathbb{Z}^2$ ikilileri düşünüldüğünde bunlardan sadece (1,2)$\in\mathbb{Z}^2$ bir rasyonel sayı olan $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$ ile eşlenebilir.

Bununla birlikte eşlemede açıkta kalan diğer elemanlar, rasyonel sayılar kümesini doğru tanımlayabilen öğretmen adayları tarafından göz ardı edilebilmektedir. Dolayısı ile sunulan yaklaşımın, formel bir temeli olmasına karşın $\mathbb{Q}\sim\mathbb{Z}^2$ noktasında sezgisel kabule dayalı bir boyutunun olduğu da söylenebilir.

Bu soru için gerçekleştirilmiş olan ispatların Blum ve Kirsch (1991) tarafından ortaya konan *Formal* ve *Pre-Formal* ispat kategorilerine göre sınıflaması yukarıda yer alan Tablo 2'de sunulduğu gibidir. Sınıflamaya dair gerekçeler aşağıda açıklanmıştır:

- Tablodaki ilk üç yaklaşım (1. - 2. ve 3.) sonsuz kümeler arasındaki denklik ilişkilerinin kabul edilebilir formel bir ilişki ağı içerisinde, Cantor tarafından kullanılan birebir-örten eşleme mantığı doğrultusunda ve doğru bir matematiksel dil çerçevesinde ifadesini içerdiğinden *formal ispat* kategorisinde değerlendirilebilir. Diğer bir ifade ile bu kategoride yer alan ispatlarda; formel bilgi yapılarının bir amaç doğrultusunda seçilmesi, örgütlenmesi, gerekçelendirilmesi ve sunulması aşamaları eksiksiz olarak tamamlanmıştır.

- Dördüncü yaklaşım ise tanımlar ve fonksiyonlar gibi formel matematiksel bileşenleri içermesine karşın denkliği gösteren eşlemenin özünde sezgisel bir varsayımı kendisine temel aldığından *pre-formal ispat* kategorisinde değerlendirilebilir.

Diğer yandan yapılan analizlerde bu soruda ispatı tamamlayamayan öğretmen adaylarının Tablo 3’te belirtilen nedenler ile ispatı oluşturamadıkları belirlenmiştir.

Tablo 3. Birinci sorunun ispatlanamama sebepleri

İspatın Tamamlanamamasının Sebebi	**Kişi Sayısı**
1) Öğretmen adaylarının sonsuzluk ya da diğer matematiksel kavramlar ile ilgili bir yanılgıya sahip olması	20
2) Öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği konusundaki kavramsal ya da yöntemsel bir bilgi eksikliği	40
3) İspatlama sürecinde işlemsel bir hataya düşenler	7
4) Soruya herhangi bir yanıt vermeyenler	4
Toplam	71

Tablonun ilk maddesini oluşturan yanılgılar aşağıda özetlenmiştir:

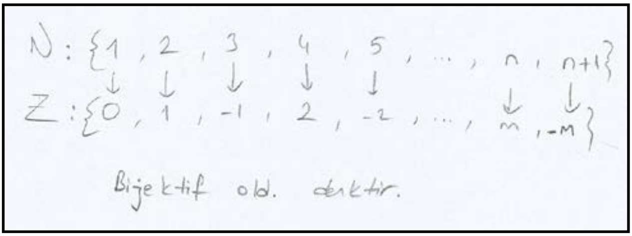
- ✓ **Boyut kavramı ile altküme kavramının yanlış ilişkilendirilmesi.**

Bazı öğretmen adaylarının $\mathbb{Z}$‘nin boyutunun $\mathbb{Z}^2$’den küçük olması nedeni ile $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^2$ olduğunu düşündükleri ve bu nedenle kümelerin denk olamayacağı kanısına vardıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının hem boyut ile alt küme kavramları arasında yanlış bir ilişki kurdukları hem de (*sonlu kümelerde olduğu gibi*) alt küme ilişkisine sahip sonsuz kümelerin denk olamayacakları biçiminde hatalı bir genellemeye ulaştıkları söylenebilir.

- ✓ **Sonsuz bir kümenin sonlu olarak ele alınması.**

Bu yanılgıya sahip öğretmen adaylarının sonsuz olduğu bilinen kümeleri sonlu temsiller kullanarak tanımladıkları ve buradan hareketle ilişkilerini inceledikleri görülmüştür. Örneğin bazı bireyler, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots , n\}$ ve $\mathbb{Z} = \{-m , -m+1 , \dots , -1, 0, 1, \dots , m-1, m\}$ gösterimlerini kullanarak bu kümelerin denk olduğunu göstermek istemişlerdir. Oysaki $n \neq 2.m+1 \ (n, m \in \mathbf{N})$ için bu kümelerin eşit olamayacağı açıktır.

Bahsedilen yanılgı durumuna ilişkin diğer bir örnek de Şekil 5’te sunulan eşlemedir:

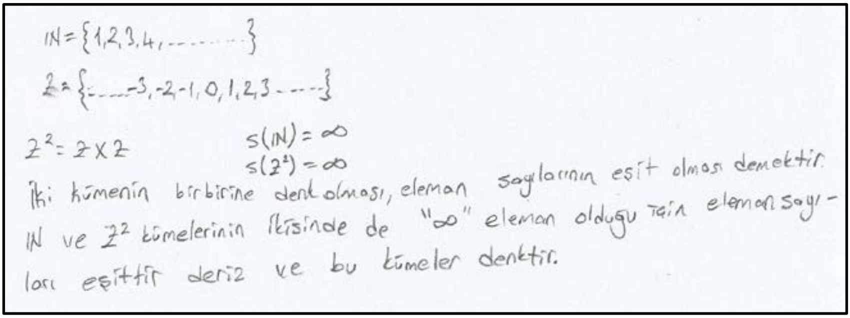


Şekil 5. Sonsuz kümelerin sonlu temsiller ile ifade edildiği bir yaklaşım

Değişkenlerin sonuncu elemanlar olarak kullanıldığı bu yaklaşım nedeni ile bireylerin sonlu kümelere ait bazı özellikleri sonsuz kümelere genelleyebilecekleri ve bu nedenle çeşitli yanılgılara sahip olabilecekleri söylenebilir.

✓ **Her sonsuzun aynı olduğu düşünülmesi.**

Bu düşünce sonsuzluğun tek türlü olabileceği fikrine dayanır. Bu yaklaşıma sahip bireyler *‘’sonsuz kümeler denktir çünkü her ikisi de sonsuz sayıda elemana sahip kümelerdir’’* yargısında bulunmuşlardır. Aşırı genelleme olarak değerlendirilebilecek bu duruma ilişkin örneklerden biri Şekil 6’da sunulmuştur:



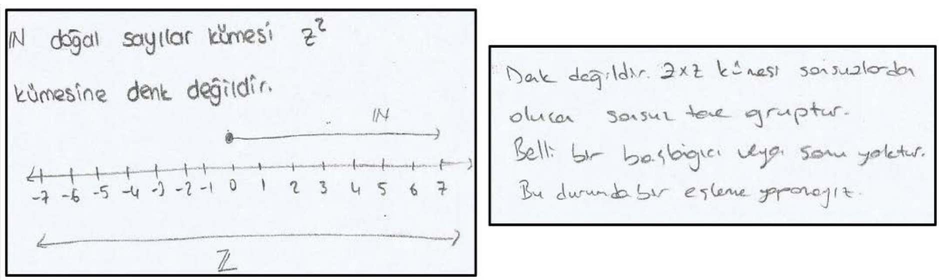
Şekil 6. Sonsuz kümelerin daima denk olduğunu ifade eden bir yaklaşım

✓ **Sonsuz kümelerin hatalı tanımlanması.**

Bazı öğretmen adaylarının $\mathbb{N}$ = [1 ,∞) ve $\mathbb{Z}$ = [-∞,-1) ∪ {0} ∪ [1, ∞) tanımlarını kullanarak ispat oluşturmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu bireylerin $\mathbb{N} = \mathbb{R}^+$ ve $\mathbb{Z} = \mathbb{R}$ şeklinde düşünerek kümeleri yanlış tanımladıkları sonucuna ulaşılabilir.

✓ **Denklik ilişkisinin sezgisel olarak ele alınması.**

Formel ispat sürecine müdahale eden sezgisel yaklaşımlardan kaynaklanan yanılgılara pek çok noktada rastlanmıştır. Örneğin bir öğretmen adayı $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ kümelerinin bir sayı doğrusu üzerinde genişlediği doğrultuları dikkate alarak bunların birbirine denk olamayacağını Şekil 7’deki gibi görsel bir temsil kullanarak ifade etmiştir.

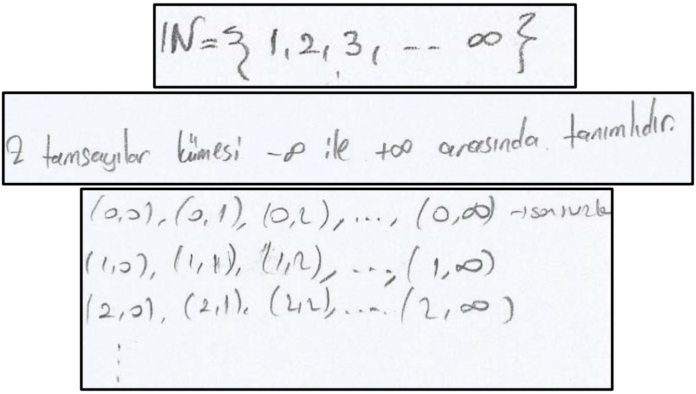


Şekil 7. Öğretmen adaylarının sezgisel yaklaşımlarına ilişkin örnekler

Başka bir öğretmen adayı ise $\mathbb{Z}^2$ kümesinin, her biri sonsuza ilerleyen eden sonsuz tane satır kullanılarak ifade edilebileceğini düşünmüş ve bu nedenle söz konusu kümenin tek bir satır ile ifade edilebilen $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesine denk olamayacağını ifade etmiştir.

✓ **- ∞ ve ∞ sembollerinin sırası ile en küçük ve en büyük sayı olarak kullanılması.**

Bu öğretmen adayları inceledikleri sonsuz kümelerin oluşumunda yer alan sonsuzun daima-sürekli artarak veya azalarak devam eden potansiyel bir süreç olduğunun farkında olmayabilirler. Bunun nedenle, sürecin '∞' olarak gösterilen sayının ötesine geçemeyeceğini düşünmektedirler. Bu bağlamda $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}^2$ kümelerinin tanımlanmasında gözlenen bazı örnekler Şekil 8'de sunulmuştur:



Şekil 8. Sonsuzluk sembolünün ''*sonuncu*'' eleman anlamında kullanımına dair örnekler

✓ **Kümeler arasındaki herhangi bir eşlemenin denklik için yeterli sayılması.**

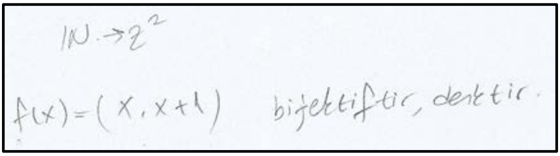
Bu düşünme biçimine sahip öğretmen adaylarının incelenen kümeler arasında kurdukları herhangi bir eşlemenin denklik için yeterli olduğunu varsaydıkları ve birebirlik-örtenlik gibi temel özellikleri yeterince ele almadıkları görülmüştür.

Örneğin Şekil 9'da sunulduğu gibi bazı bireyler $\mathbb{Z}^2$ kümesinin bazı elemanlarını gelişigüzel yazarak $\mathbb{N}$ ile eşlemiş ve denkliği gösterdiklerini düşünmüşlerdir. Oysaki burada $\mathbb{Z}^2$ kümesinin elemanlarının tümünün hangi kurala göre nasıl dizilebileceği yeterince izah edilmemiştir.

$$\begin{array}{rcccc} \mathbb{Z}^2 = \{ & (-1,1), & (1,1), & (2,1), & \ldots\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{N} = \{ & 1, & 2, & 3, & \ldots\} \end{array}$$

Şekil 9. Bijektiflik şartlarının yeterince incelenmediği bir eşleme

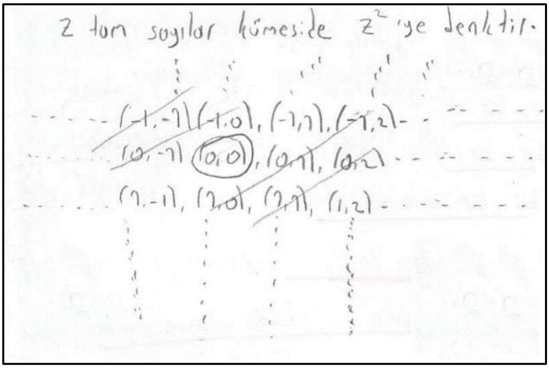
Sunulan yaklaşıma ilişkin başka bir örnek de bijektiflik açısından yeterince incelenmemiş olan Şekil 10'daki cebirsel fonksiyondur.



Şekil 10. Bijektiflik şartlarının yeterince incelenmediği kurallı bir fonksiyon

Diğer yandan yapılan analizlerde öğretmen adaylarının ispata ulaşamama sebepleri arasında en büyük payı onların bilgi eksikliklerinin oluşturduğu belirlenmiştir. Bununla birlikte belirlenen bilgi eksikliklerinin çok önemli bir kısmının ispata ilişkin seçilen yöntemin uygunluğunu değerlendirme ve alternatif çözümler üretme konusunda olduğu görülmüştür. Diğer bir ifade ile öğretmen adaylarının büyük bölümünün sonsuzluk, sayılabilirlik ve denklik gibi temel kavramlara sahip olmalarına karşın bunları yeni ve farklı olan duruma transfer etmede, yani yeni yöntemler oluşturmada sıkıntı yaşadıkları söylenebilir.

Örneğin $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}^2$ denkliğini göstermeye çalışan 23 öğretmen adayı $\mathbb{Z}^2$ kümesi ile $\mathbb{N}$ arasında bijektif bir eşleme yapılması gerektiğinin farkında olmasına karşın, $\mathbb{Z}^2$ kümesini sistematik bir biçimde sıralamada ısrarcı olduğu ve bunu başaramadığı için $\mathbb{N}$ ile denkliğini gösterememiştir. Bahsedilen bu yaklaşıma dair örneklerden biri Şekil 11'de sunulmuştur:



Şekil 11. Sıralamadaki güçlük nedeni ile bijektif eşlemenin kurulamadığı bir yaklaşım

3.2. İkinci Soruya Verilen Yanıtların Analizi

Formda yer alan ikinci soru 43 öğretmen adayı tarafından formel biçimde ispatlanabilirken kalan 78 öğretmen adayı tarafından çeşitli nedenler ile tamamlanamamıştır. Tıpkı ilk soruda olduğu gibi formel ispatı oluşturabilen öğretmen adaylarının Cantor yaklaşımını doğru biçimde kullanabildikleri görülmüştür. Benimsenen temel yaklaşımlar frekansları ile aşağıda yer alan Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4. İkinci soruyu ispatlayabilen öğretmen adaylarının yaklaşımları

İspatın Tamamlanamamasının Sebebi	Kişi Sayısı
1) Sonsuzluk ya da diğer matematiksel kavramlar ile ilgili bir yanılgıya sahip olunması	32
2) Schröder-Bernstein teoreminin hatalı kullanımı	
a. Alt kümelerin hatalı belirlenmesi	24
b. Fonksiyonların hatalı oluşturulması	10
3) Soruya herhangi bir yanıt vermeyenler	12
Toplam	**78**

İspatı tamamlayabilen öğretmen adaylarının yaklaşımları incelendiğinde tüm bireylerin daha önce görmüş oldukları *Schröder-Bernstein Teoremi*'ni kullanarak ispatı oluşturdukları belirlenmiştir. Bu teoreme göre, her biri diğerinin uygun alt kümesine denk olabilen iki küme birbirine denktir (Güney ve Özkoç, 2015). Yani, A ve B birer küme olmak üzere kümelerin denkliği bu teoreme göre aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad [(A_1 \subset A \Rightarrow \quad A_1 \sim B) \wedge (B_1 \subset B \Rightarrow B_1 \sim A)]$$

İkinci sorunun ispatında kullanılan temel yaklaşımlar aşağıda açıklanacaktır.

- Her iki kümeden uygun alt kümeler seçerek diğer küme ile cebirsel eşleme.

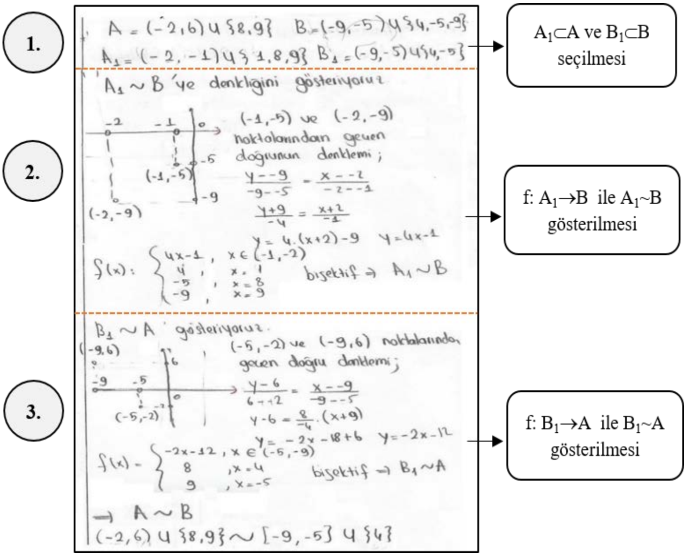
Bu yaklaşımı benimseyen öğretmen adayları A= (-2,6) ∪ {8,9}ile B= [-9,-5] ∪ {4} kümeleri arasındaki denkliği gösterirken ilk olarak A ve B kümelerinden uygun birer alt kümeler seçmiş sonrasında bu alt kümelerin, karşılaştırılan diğer küme ile denkliğini kurallı bijektif fonksiyonlar ile göstermişlerdir. Bu öğretmen adaylarından birinin ispatı aşağıda Şekil 12'de sunulmuştur.

- Her iki kümeden uygun alt kümeler seçerek diğer küme ile geometrik eşleme.

Bu yaklaşımı benimseyen öğretmen adayları A=(-2,6)∪{8,9} ile B=[-9,-5]∪{4} kümesinin denkliğini gösterirken, seçtikleri alt kümeler arasında cebirsel olarak ifade edilen bijektif fonksiyonlar tanımlamak yerine geometrik bir yaklaşım tercih etmişler ve doğru parçaları yardımı ile bu denkliği ifade etmişlerdir.

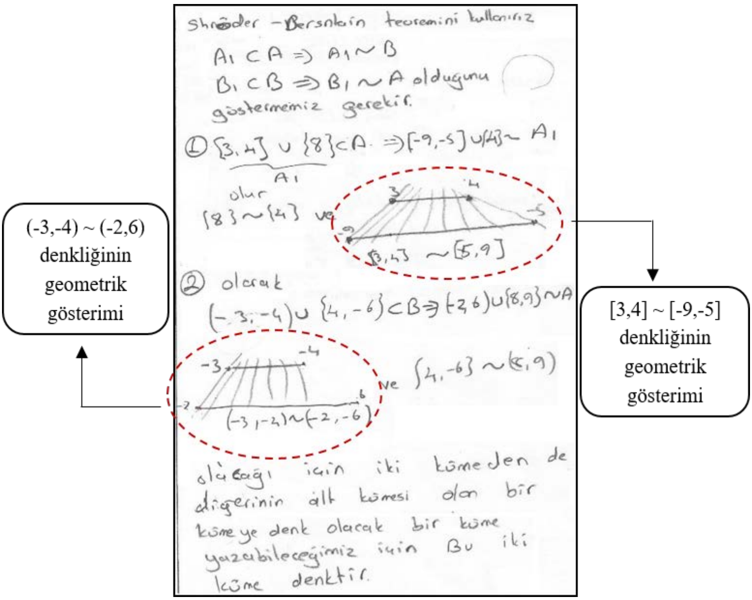
Bu yöntemin aşağıdaki iki temel bilgi üzerine kurulduğu söylenebilir:

- *Bir doğru parçası üzerinde sonsuz nokta yer alır.*
- *Farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.*



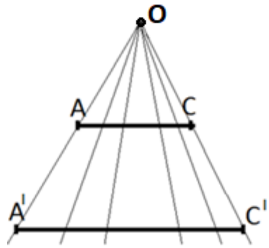
Şekil 12. Schröder-Bernstein teoreminin kurallı fonksiyonlar ile uygulandığı bir ispat

Bahsedilen yaklaşımı benimseyen bir öğretmen adayının yaklaşımı aşağıdaki Şekil 13'te sunulmuştur.



Şekil 13. Schröder-Bernstein teoreminin görsel temsiller ile uygulandığı bir ispat

Bu yaklaşıma göre sayılamaz sonsuz iki kümenin kardinalitelerinin eşitliğinin öğretmen adayları tarafından oluşturulan görsel temsiller üzerinde ilişkilendirilerek yorumlandığı söylenebilir. Pala (2016) tarafından oluşturulan ve Şekil 14’te sunulan görsel, öğretmen adaylarının geometrik yaklaşım kullanarak kurdukları bu denklikleri açıklamaktadır.



Şekil 14. Geometrik gösterimde kardinalitelerin eşitliği: # ([AC]) = # ([A'C'])

Buna göre O odağından çizilen ışınların [AC] üzerinde yer alan her bir noktayı [A'C'] üzerindeki bir ve yalnız bir noktaya eşlemesi nedeni ile doğru parçalarının eş güçlü olduğu yorumu yapılabilir.

Araştırmanın ikinci sorusu için gerçekleştirilen ispatların Blum ve Kirsch (1991) tarafından ortaya konan *formal* ve *pre-formal* ispat kategorilerine göre sınıflaması yukarıda yer alan Tablo 4’de sunulduğu gibi yapılabilir. Sınıflamaya dair gerekçeler aşağıda açıklanmıştır:

- Birinci yaklaşım A ve B kümeleri arasındaki denklik ilişkilerinin kurallı fonksiyonlar ile cebirsel ifadesini içerdiğinden *formal* ispat kategorisinde değerlendirilebilir. Çünkü bu yaklaşım matematiksel olarak doğru kabul edilen çıkarımların bir dizisini ve formal açıklamalarını içerir.
- Diğer yandan geometrik temsilleri temel alan ikinci yaklaşımın ise kardinalite mantığını geçerli kılan ancak bunu birinci yöntemin aksine doğrudan açık bir kural ile formal biçimde kanıtlamayan sezgisel unsurları da içerisinde barındırdığı söylenebilir. Yani sunulan bu yaklaşım, iki aralık üzerinde yer alan elemanların eşleneceğini belirtmesine karşın bu eşlenmenin hangi kurala göre ve nasıl olacağını yeterince izah etmemektedir. Bu nedenle formel unsurlara ek olarak bireyleri sezgisel bir genellemeye götüren bileşenleri de içerdiği göz önüne alınarak *pre-formal* yaklaşım kategorisinde değerlendirilebilir.

Diğer yandan yapılan analizlerde bu soruda ispatı tamamlayamayan öğretmen adaylarının Tablo 5’te nedenler ile ispatı oluşturamadıkları gözlenmiştir.

Tablo 5. İkinci sorunun ispatlanamama sebepleri

İspatın Tamamlanamamasının Sebebi	Kişi Sayısı
1) Sonsuzluk ya da diğer matematiksel kavramlar ile ilgili bir yanılgıya sahip olunması	32
2) Schröder-Bernstein teoreminin hatalı kullanımı	
a. Alt kümelerin hatalı belirlenmesi	24
b. Fonksiyonların hatalı oluşturulması	10
3) Soruya herhangi bir yanıt vermeyenler	12
Toplam	**78**

Tablonun ilk maddesini oluşturan yanılgılar aşağıda özetlenmiştir.

✓ **Sonlu sayıda elemanın, sonsuz kümelerin denkliğini etkilediğinin düşünülmesi.**

Sonsuz kümelere sonlu sayıda eleman eklenme ya da çıkarma kümelerin kardinalitesini değiştirmeyeceğinden, kümelerde denkliğinin niteliğini de değiştirmez. Oysa bazı öğretmen adayları A= (-2,6) ∪ {8, 9} ve B= (-9,-5) ∪ {-9, -5, 4} şeklinde yazdıktan sonra birleşim kümelerinin sonlu kısımlarına odaklanarak $A \nsim B$ sonucuna ulaşmışlardır.

✓ **Sayılamaz sonsuz her kümenin denk olduğunun düşünülmesi.**

Bazı öğretmen adayları A= (-2,6) ∪ {8,9} kümesi ile B= [-9,-5] ∪ {4} kümelerinin denk olup olmadığını araştırma ihtiyacı bile duymamıştır. Bu bireylere göre her iki küme de sayılamaz olduğundan bu kümeler birbirlerine denk olmalıdır.

✓ **Sayılamaz sonsuz kümelerin sonlu veya sayılabilir kümeler olarak ele alınması.**

Bu yanılgıya sahip öğretmen adayları verilen sayılamaz sonsuz kümelerde yer alan aralık gösterimlerini tam sayıları ifade etmenin pratik bir yolu olarak değerlendirmiş ve bu aralıkları dikkate almaları gerektiğinde sadece içerisinde yer alan tamsayıları ifade etmişlerdir. Örneğin bu yanılgı doğrultusunda A= (-2,6) ∪ {8,9} kümesi, A= {-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9} şeklinde ifade edilmiştir. Bununla birlikte bazı bireylerin de açık veya kapalı aralıkları sadece rasyonel sayıları içeren kümeler olarak değerlendirdikleri ve ispatlarını da buna göre şekillendirdikleri görülmüştür.

✓ **Schröder-Bernstein Teoremi'nin anlamının yanlış kavranması.**

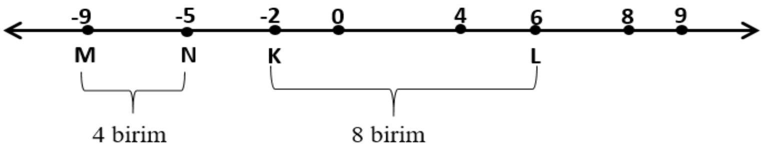
Bazı öğretmen adaylarının ''*birbirinin uygun alt kümesine denk olan kümeler denktir*'' şeklinde yorumlanabilecek Schröder-Bernstein Teoremi ile ilgili yanlış bir anlayışa sahip oldukları görülmüştür. Özellikle bu bireylerin, teoremi aşağıda ifade edildiği biçimi ile ''*alt kümeleri denk olan kümeler denktir*'' biçiminde yorumladıkları belirlenmiştir.

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad [(A_1 \subset A \wedge B_1 \subset B) \Rightarrow (A_1 \sim B_1)]$$

Örneğin bu yaklaşıma sahip öğretmen adaylarından biri $(-2,6) \subset A$ ve $(-6,-8) \subset B$ alt kümeleri için (-2,6) ~ (-6,-8) denkliğine ulaşmış ve buradan hareketle üst kümeler olan A ve B kümelerinin de denk olması gerektiği sonucunu ifade etmiştir.

✓ **Sonsuz aralıkları metrik uzunluklarına göre kıyaslayanlar.**

Bu yanılgıya sahip öğretmen adaylarının, özellikle aralık veya doğru parçası şeklinde verilen sonsuz kümelerin denkliğini araştırırken bunların içerdikleri elemanlar arasında birebir-örten bir fonksiyon tanımlamak yerine doğrudan uzunluklarını kıyaslayarak karar verme eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Örneğin bu yanılgıya sahip bir öğretmen adayı, A= (-2,6) ∪ {8,9} kümesi ile B= [-9,-5] ∪{4} kümesinin birbirlerine denk olamayacağını Şekil 15'te sunulan ölçümler doğrultusunda kanıtladığını düşünmüştür.



Şekil 15. Aralıkların uzunluklarını dikkate alan yaklaşım

Diğer yandan yapılan analizlerde öğretmen adaylarının ispata ulaşamama sebepleri arasında en büyük payın hatalardan kaynaklandığı belirlenmiştir. Bu hataların bir kısmının uygun alt kümelerin seçilmesi ile ilgili olduğu diğer bir kısmının da tanımlanan fonksiyonlar ile ilgili olduğu görülmüştür. Örneğin kümeler arasında bijektif bir fonksiyon tanımlamaya çalışan ve birebirlik-örtenlik şartlarını da dikkate alan bazı öğretmen adaylarının bahsettikleri bu şartlara uymayan cebirsel fonksiyonlar tanımladıkları belirlenmiştir. Bu durumun bireylerin oluşturdukları örnekleri yeterince test etmemelerinden kaynaklandığı belirlendiğinden yanılgı olarak sınıflanmamıştır.

4. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada matematik öğretmeni adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini göstermede benimsedikleri yaklaşımlar ve yaşadıkları güçlüklerin incelenmesi amaçlanmıştır. Bununla birlikte geçerli bir ispat ortaya koyabilen katılımcıların yaklaşımlarının sınıflanmasında Blum ve Kirsch (1991) tarafından önerilen *formal* ispat ve *pre-formal* ispat kategorilerden yararlanılmıştır. Analizlerde ulaşılan bulgulara göre öğretmen adaylarının sonsuz kümeleri karşılaştırmaları gereken ispatlama aktivitelerinde hem *formal* hem de *pre-formal* yaklaşımları benimseyebildikleri ve farklı durumlar içerisinde bunları bazen de birlikte kullanabildikleri söylenebilir. Bu çalışma kapsamında sunulmuş olan iki soruda farklı ispat türlerine ait kategorilerin bulunması bu durumun bir göstergesi olarak değerlendirilebilir. Ayrıca bu kategorilerden *formal* ispat kategorisinde yer alan öğretmen adaylarının, mantıksal çıkarımlar ile çerçevelenen ve matematiksel notasyon dilinin etkin olarak kullanıldığı ispat yaklaşımına sahip olmasına karşın *pre-formel* seviyede yer alan öğretmen adaylarının ise mantıksal çıkarımlar yanında sezgisel argümanlara da yer verdikleri söylenebilir. Diğer yandan hem *formal* hem de *pre-formal* olarak sınıflanan ispatların tamamının şekiller, diagramlar ve sözel açıklamalar gibi diğer tamamlayıcı unsurlar ile desteklenmesinin ispatın geçerliğini artırmaya dönük olduğu ve Weber ve Alcock (2004) tarafından ifade edilen semantik (anlamsal) oluşum kapsamında yorumlanabileceği söylenebilir. Dolayısı ile öğretmen adaylarının, gerçekleştirmiş oldukları ispatlama aktivitelerinde Tall (1998) tarafından ifade edilmiş olan açıklayıcı olma işlevini ön planda tuttukları yorumu yapılabilir.

Yapılan analizlerde her bir soruda ispatı oluşturabilen öğretmen adaylarının sayısının ispatı oluşturamayanlara göre açıkça az olduğu da görülmektedir. Buradan hareketle öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili kavramsal, işlemsel ve yöntemsel bilgi düzeylerinin istenilen seviyeden uzak olduğu yorumu yapılabilir. Literatürde öğretmen adaylarının benzer güçlükler yaşadıklarını belirten farklı çalışmalara rastlanabilir (ör., Çelik ve Akşan, 2013; Güven ve Karataş, 2004; Jirotková & Littler, 2003; Kanbolat, 2010; Kolar & Čadež, 2012; Narlı & Başer, 2008; Pala, 2016; Singer & Voica, 2008; Tsamir, 1999, 2001). Örneğin, Tsamir (2001) öğretmen adaylarının sonsuz kümeleri kıyaslamada *parça-bütün ilişkisi, tek sonsuzluk ölçütü, sonsuz kümelerin karşılaştırılamayacağı fikri* ve *bire-bir eşleme* gibi farklı yaklaşımları kullanabileceğini ifade etmiş ve onların farklı temsiller (nümerik-geometrik) ile sunulan sonsuz kümeleri kıyaslamada çelişen yanıtlar verebildiğini ortaya koymuştur. Bu çalışmada da aynı dersi almış olan öğretmen adaylarının sonsuz kümeleri kıyaslamada farklı temsillere dayalı yaklaşımları benimsemeleri sonucunda farklı yanıtlara ulaştıkları gözlenmiştir. Diğer yandan özellikle Tablo 2'de ve Tablo 4'te yer alan *pre-formal* yaklaşım kategorileri dikkate alındığında öğretmen adaylarının formel ispata ulaşamamalarındaki önemli bir etkenin de onların sezgisel yaklaşımları olduğu tespit edilmiştir. Fischbein'e (1999) göre kişisel bir kesinlik hissine dayanan ve özel bir bilişsel yapı olarak tanımlanan sezginin, bireyleri formel delilleri araştırmadan alıkoyduğu ve bunun yerine varsayımlar ya da kabuller gibi informel yaklaşımlar yolu ile ispat sürecini biçimlendirdiği söylenebilir (Pala, 2016). Çalışmanın bulguları incelendiğinde Tsamir (1999) tarafından sonlu kümelere ait anlayışın genelleştirilmesi ile ortaya çıktığı belirtilmiş olan sezgisel yaklaşımlara; parça-bütün ilişkilerinin yorumlanması, kümeler arasında eşlemelerin oluşturulması, görsel yaklaşım ile karar verilmesi gibi farklı durumlar içerisinde rastlandığı söylenebilir. Ayrıca Kolar ve Čadež (2012) tarafından belirtilmiş olan sonsuzluğun sınırsızlık-genişleme kavramları çerçevesinde sezgisel yorumlanmasına dair örneklerin de bu çalışmada gözlendiği söylenebilir.

Bununla birlikte öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükler içerisinde sezgisel yaklaşımın önemli bir yeri olmasına karşın onların sahip oldukları diğer yanılgıların da önemli sonuçları doğurduğu söylenebilir. Yapılan analizlerde öğretmen adaylarının sonsuz kümeyi sonlu olarak yorumlamaları, kümeleri hatalı tanımlamaları, temsil ve sembolleri yanlış yorumlamaları, denklik tanımını uygulayamamaları, bijektiflik şartlarını doğru ifade edememeleri vb. çeşitli yanılgılara sahip olmaları nedeni ile ispatı oluşturamadıkları belirlenmiştir. Bir ispatın oluşturulabilmesi için ilgili yapıların doğru seçilmesi ve bunlar arasında doğru ilişkilerin kurulması gerektiği açıktır. Bu perspektif ışığında kavramsal temelin ispat için gerekli olan ön şartlarından biri olduğu düşünüldüğüne bireylerin formel ispata ulaşabilmeleri için ilgili kavramlara dair hazırbulunuşluğa sahip olmaları ve söz konusu kavramları hem işlemsel hem de anlamsal düzeyde etkin bir şekilde kullanabilmeleri gerektiği söylenebilir. Ayrıca bu çalışmanın yanılgılara ilişkin bulgularının literatürde yer alan diğer pek çok çalışmanın bulguları ile örtüştüğü de görülmektedir (ör., Güven ve Karataş, 2004; Jirotková & Littler, 2003; Kolar & Čadež, 2012; Narlı & Başer, 2008; Pala, 2016; Tsamir, 1999, 2001). Örneğin, Tsamir (2001) tarafından ifade edilmiş olan tekil sonsuzluk, tüm sonsuzların eşitliği ve bütünün parçaya denk olamaması gibi yaklaşımlara dair çeşitli örnekler bu çalışmada belirlenen yanılgılar içerisinde de vurgulanmıştır. Diğer yandan, sonsuzun tek türlü var olabileceği, tüm sonsuzların denk olması gerektiği ve sonlu küme işlemlerinin sonuçlarının sonsuz kümeler için de geçerli olabileceği gibi benzer yanılgılar, Güven ve Karataş (2004) ile Narlı ve Başer'in (2008) çalışmalarında ortaya konan sonuçları desteklemektedir.

İspatlama aktivitelerine ilişkin diğer bir önemli husus da konu alanına ilişkin ön bilgileri tam olan öğretmen adaylarının ispatı oluşturmada yaşadığı güçlüklerdir. Bu bireylerin büyük çoğunluğunun sahip oldukları bilgileri yeni - farklı durumlara transfer etmede güçlük çektikleri ve ispatı oluşturmada yöntemsel bilgi eksikliklerine sahip oldukları yorumu yapılabilir. Benzer sonuçları ifade eden Weber'de (2001) yeterli hazırbulunuşluğa sahip bireylerin dahi bir önermeyi ispatlamada güçlükler yaşadıklarını belirterek bu durumu ispatlamada kullanılabilecek stratejik bilgiler çerçevesinde yorumlamıştır. Bu noktada ispat oluşumunu bir süreç çerçevesinde yorumlayan Bell' in (1979) önermiş olduğu gibi bireylerin önermeleri doğrulama, açıklama ve sistematikleştirme becerilerinin gelişimi sayesinde ispat yapabilme alışkanlığı kazanabilmeleri mümkün olabilir.

Sunulan bu çalışmada ortaya çıkan yöntemlerin çeşitlendirilmesi ve yaşanan güçlüklerin önlenebilmesi için öğretim elemanlarının Cantor'un Küme Teorisi ile ilgili kavramları uygun bir hiyerarşi altında ve ilişkisel bir yapı içerisinde sunması gerektiği söylenebilir. Bu noktada örneğin sonsuzluk kavramına geçmeden önce bağıntı, küme ve fonksiyon gibi temel kavramların bireylerde eksiksiz olarak oluşturulması ve bunlar arasındaki ilişkilerin açıklanması anlamsal (relational) öğrenme açısından büyük önem arz etmektedir. Ayrıca bireyler tarafından sık kullanılan sezgisel yaklaşımların ve bunların formel bilgi ile çelişen yönlerinin öğreticiler tarafından gözetilerek derslerin işlenmesi gerektiği de söylenebilir. Bu sayede sonsuzluğun bir nesne olarak algılanmasının önüne geçen potansiyel yaklaşımın (Dubinsky ve ark., 2005) etkileri azaltılabilir. Diğer yandan farklı seviyelerde düzenlenebilecek ispat çalışmaları ile öğretmen adaylarının hem sonsuzluk kavramına hem ispatlama becerilerine ilişkin durumları daha iyi anlaşılabilir. Ayrıca bu çalışmalarda ortaya konan ispatların incelenmesinde farklı kuramcılara ait şemaların kullanılması ile paradigma açısından da bir çeşitlilik de sağlanabilir.

Geniş perspektiften bakıldığında soyut matematik içerisinde özel bir yeri olan sonsuzluk kavramının öğretmen adaylarında doğru biçimde oluşturulmasının, onların ileride rehberlik edecekleri öğrencilerde geliştirmeleri beklenen soyut düşünme ile problem çözme becerilerini doğrudan etkileyebileceği söylenebilir. Bu nedenle öğretmen adaylarının güçlü ve zayıf yanlarının detaylandırılmasının matematik eğitimi açısından büyük bir önem taşıdığı sonucuna ulaşılabilir.

Prospective Mathematics Teachers' Proving Approaches and Difficulties Related to Equivalence of Infinity Sets

Extended Abstract

Introduction

Proof and proving activities can be considered to have a significant role in understanding mathematics (Uğurel & Moralı, 2010). As a result of the literature review conducted for this paper, it was seen that mathematics education researchers put forward different proof schemas (e.g., Balacheff, 1988; Blum & Kirsch, 1991; Harel & Sowder, 1998; Miyazaki, 2000; Weber & Alcock, 2004). One of these schemas was presented by considering the validity dimension of proof by Blum and Kirsch (1991). According to them, a valid proof can be categorized into following two definitions (Aylar, 2014):

- ✓ *Pre-formal proofs:* They are arguments, which are not proved formally. Although these proofs include arguments about why a theorem is true, they have no well-structured logical deductions.
- ✓ Formal proofs: These proofs have logical deductions, which are accepted mathematically.

The studies examining teacher candidates' knowledge about the concept of infinity through proving activities are limited in number. Therefore, this study focuses on the equivalence relations between infinite sets and aims to determine prospective teachers' approaches and difficulties in proving process. The categories presented by Blum and Kirsch (1991) are used to analyze their proofs. This study is expected to inform the instructors about difficulties which may be observed in teaching the concept of infinity in Abstract Mathematics.

Method

In this qualitative case study, convenience-sampling method was chosen. The participants of the study were 121 pre-service mathematics teachers studying in a state university. One of the authors presented Cantorian Set Theory in a lecture to provide prior knowledge to them. Then, in order to determine prospective teachers' approaches and difficulties in proving, a form including four questions was prepared through two experts' views. In this study, the findings of the following two questions, one of which is about countable sets and the other is about uncountable sets, were presented:

1) Let $\mathbb{N}$ be the Set of Natural Numbers and $\mathbb{Z}$ be the Set of Integers. Then is $\mathbb{N}$ equivalent to $\mathbb{Z}x\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$?
2) Is the set of $A = (-2,6) \cup \{8,9\}$ equivalent to the set of $B = [-9 ,-5] \cup \{4\}$?

The analysis of the data was conducted through content analysis. The approaches and the difficulties were categorized for each question. The encoders produced 90% agreement on codes.

Results

In this section, the responses for two questions were examined and categorized. The proof approaches of teacher candidates and number of them in the first question as follows:

1. Undergraduates who demonstrate $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$ and $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}^2 \Rightarrow \mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$ (22)
2. Undergraduates who demonstrate the equivalence through ordering regularly the set of $\mathbb{Z}^2$ (3)
3. Undergraduates who demonstrate the equivalence through cartesian coordinate system (21)
4. Undergraduates who demonstrate $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}$ and $\mathbb{Q}\sim\mathbb{Z}^2 \Rightarrow \mathbb{N}\sim\mathbb{Z}^2$ (4)

The first three approaches can be evaluated as *formal* proof because they include both the bijective matching presented by Cantor and the correct mathematical notation. Although the fourth approach included mathematical components such as definitions and functions, the equivalence of $\mathbb{Q}\sim\mathbb{Z}^2$ was accepted intuitionally. Therefore, the last approach can be considered to be in the category of *pre-formal* proof.

The proof approaches of prospective teachers and number of them in second question as follows:

1) The algebraic matching between sets by choosing the proper subsets (24)
2) The geometric matching between sets by choosing the proper subsets (19)

Because the first approach presented the equivalence of the sets of A and B through algebraic functions, it can be considered as formal proof. On the other hand, the second approach, which was based on geometric representations, includes intuitional components that was not proved formally. So, it can be considered in the category of *pre-formal* proof.

In addition to these findings, it was observed that the prospective teachers could not complete their proof because of the reasons such as misconceptions, mistakes, and deficiencies on proving methods.

Conclusion and Discussion

These findings suggest that prospective teachers adopted both *formal* and *pre-formal* approaches in proving activities that include comparing infinite sets. Furthermore, while some of the teacher candidates used only one of these approaches, some utilized both of them. On the other hand, it was seen that the number of undergraduates who constructed the proof correctly are quite less than the others who could not. From this point of view, the prospective teachers can be said to have insufficient conceptual, operational and procedural knowledge. In addition to this result, various mistakes such as expressing an infinite set as finite, defining the infinite sets incorrectly, misusing the representations and symbols were found to prevent the proving process. Besides, another important reason for deficiency in constructing the formal proof was identified as intuitional approaches. In the literature, there are several studies reporting similar difficulties of prospective teachers (e.g., Çelik & Akşan, 2013; Güven & Karataş, 2004; Jirotková & Littler, 2003; Kanbolat, 2010; Kolar & Čadež, 2012; Narlı & Başer, 2008; Pala, 2016; Singer & Voica, 2008; Tsamir, 1999, 2001).

In order to overcome these difficulties and to diversify proving methods, it can be recommended to present concepts regarding Cantorian Set Theory in an interrelated way and with convenient hierarchy. Besides, a deeper understanding about proving processes may be developed through analyzing with different theoretical frameworks.

Kaynaklar/References

Akbulut, K. ve Akgün, L. (2005). Matematik ve sonsuzluk. *Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, 11*, 548-559.

Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aztekin, S. (2008). *Farklı yaş gruplarındaki öğrencilerde yapılanmış sonsuzluk kavramlarının araştırılması* (Yayınlanmamış doktora tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Trabzon: Derya Kitabevi.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.) *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton

Bell, A. W. (1979). The learning of process aspects of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(3), 361-87.

Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(2), 183-203.

Büyüköztürk, Ş. (2005). Anket geliştirme. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, *3*(2), 133–151.

Çelik, D. ve Akşan, E. (2013). Matematik öğretmen adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarına ilişkin anlamları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *7*(1), 166-190.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An apos-based analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335-359.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 11-50.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 309-329.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(1), 3-40.

Güney, Z. ve Özkoç, M. (2015). *Soyut matematik*. İzmir: Dinozor Kitabevi.

Güven, B. ve Karataş, İ. (2004). Sonsuz kümelerin karşılaştırılması: Öğrencilerin kullandığı yöntemler. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, *15*, 65-73.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.) *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Jirotková, D., & Littler, G. (2003). Student's concept of ınfinity in the context of a simple geometrical construct. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 126-132.

Kanbolat, O. (2010). *Bazı matematiksel kavramlarla ilgili epistemolojik engeller* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Kaptan, S. (1998). *Bilimsel araştırma ve istatistik teknikleri*. Ankara: Tekışık Web Ofset.

Karaçay, T. (2004). Yirminci yüzyılda matematiği sarsan temel düşünceler. *Matematik Dünyası*, *13*(2), 57-63.

Kolar, V. M., & Cadez, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 389-412.

Maria, K., Thanasia, M., Katerina, K., Constantinos, C., & George, P. (2009, February). *Teachers' perceptions about infinity: A process or an object?* Paper presented at the CERME 6, Lyon, France.

Martin, W. G., & Wheeler, M. M. (1987, July). *Infinity concepts among preservice elementary school teachers.* Paper presented at the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, France.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 47-68.

Narlı, S., & Başer, N. (2008). Cantorian set theory and teaching prospective teachers. *International Journal of Environmental & Science Education, 3*(2), 99-107.

Narlı, S. ve Narlı, P. (2012). Sonsuz sayı kümeleri ışığında ilköğretim öğrencilerinin sonsuzluk algı ve yanılgılarının belirlenmesi. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, *33*, 123-137.

Özmantar, F. (2010). Sonsuzluk kavramı: Tarihsel gelişimi, öğrenci zorlukları ve çözüm önerileri. M. F. Özmantar, E. Bingölbali & H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (ss. 151-180) (2. baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Pala, O. (2016). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği konusundaki kanıt imajlarının incelenmesi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (M. Bütün & S. B. Demir, Çev.). Ankara: Pegem Yayınevi.

Sbaraglı, S. (2006). Primary school teachers' beliefs and change of beliefs on mathematical infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *5*(2), 49-76.

Shipley, W. J. (1999). *An investigation of college students' understanding of proof construction when doing mathematical analysis proofs* (Unpublished doctoral dissertation). The American University, Washington.

Singer, F. M., & Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(3), 188-205.

Tall, D. (1998, August). *The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some?* Paper presented at the Conference of the University of Chicago School Mathematics Project, Chicago.

Tall, D.O. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 199-238.

Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinitesets: teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *38,* 209– 234.

Tsamir, P. (2001). When the same is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 289-307.

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets—a process of abstraction: The case of Ben. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 1-23.

Türk Dil Kurumu [TDK]. (2018). *İspat.* www.tdk.gov.tr adresinden 01.03.2018 tarihinde erişilmiştir.

Uğurel, I. ve Moralı, H. S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, *28*, 135-154.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101–119.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, *56* (2/3), 209-234.

Yıldırım A. ve Şimşek H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.